

٦ - ١ مركز الثقل

الجسم الجاسئ :

هو الجسم الذى تكون فيه المسافة بين أى جسيمين من الجسيمات المكونة له ثابتة

مركز ثقل الجسم الجاسئ:

هو نقطة إفتراضية تعبر عن محصلة أثقال عناصر الجسم الجاسئ وهى أيضا نقطة الإتزان أى أنها النقطة التى يتوزع حولها ثقل الجسم بالتساوى من جميع الجهات

تعريف:
مركز ثقل جسم جاسئ هو نقطة ثابتة فى الجسم يمر بها خط عمل محصلة أوزان الجسيمات التى يتكون منها الجسم ، ولا يتغير موضعها بالنسبة للجسم مهما تغير وضعه بالنسبة للأرض.

الجسم المنتظم الكثافة:

هو الجسم الذى تكون كتلة وحدة الأطوال أو المساحات أو الحجوم المأخوذة من أى جزء منه ثابتة

ملاحظات:

١) مركز ثقل الجسم الجاسئ يتغير بتغير شكله وذلك لتغير الأبعاد بين الجسيمات المكونة له.
٢) يوجد مركز ثقل واحد للجسم الجاسئ.
٣) خط عمل وزن الجسم الجاسئ يجب أن يمر بمركز ثقل الجسم وايضا بمركز الكرة الأرضية.

مركز ثقل نقطتين ماديتين (جسيمين):

إذا كانت كتلة الجسيمين هما $ك_١ ، ك_٢$ فى الموضعين $س_١ ، س_٢$ على محور السينات بالنسبة لراصد عند نقطة الأصل و

فإن مركز ثقل هذين الجسيمين بالنسبة للراصد يتحدد بالعلاقة:

$$س_م = \frac{ك_١ س_١ + ك_٢ س_٢}{ك_١ + ك_٢}$$

حيث $س_م$ هو الإحداثى السينى لمركز الثقل أى بعد مركز الثقل عن الراصد

مثـــال:

جسيمين ماديين كتلة كل منهما ٣ نيوتن ، ٥ نيوتن والمسافة بينهما ٨ أمتار . أوجد مركز ثقل الجسيمين بالنسبة للجسم ٣ نيوتن.

الحـــل:

نعتبر أن الخط الواصل بين الجسيمين ينطبق على محور السينات وأن نقطة الأصل تقع عند الجسم ٣ نيوتن

فيكون: $س_١ = ٠$ ، $س_٢ = ٨$ ، $ك_١ = ٣$ ، $ك_٢ = ٥$

$$\therefore س_م = \frac{ك_١ س_١ + ك_٢ س_٢}{ك_١ + ك_٢}$$

$$\therefore س_م = \frac{٣ \times ٠ + ٥ \times ٨}{٣ + ٥} = \frac{٤٠}{٨} = ٥$$

٥ نيوتن ٣ نيوتن
٨ متر و
$س_٢ = ٨$ $س_١ = ٠$

أى أن مركز ثقل الجسيمين يقع على بعد ٥ متر من الجسم ٣ نيوتن

متجه موضع مركز الثقل للجسم الجاسئ:

إذا كانت $و_١ ، و_٢ ، و_٣ ، \ldots ، و_ن$ أوزان الجسيمات المكونة للجسم الجاسئ وكان $\overleftarrow{ر_١} ، \overleftarrow{ر_٢} ، \overleftarrow{ر_٣} ، \ldots ، \overleftarrow{ر_ن}$ متجهات مواضع هذه الأوزان بالنسبة لنقطة الأصل فإن متجه الموضع $\overleftarrow{ر}$ لمركز ثقل الجسم الجاسئ بالنسبة لنقطة الأصل يتحدد من العلاقة:

$$\overleftarrow{ر} = \frac{و_١ \overleftarrow{ر_١} + و_٢ \overleftarrow{ر_٢} + و_٣ \overleftarrow{ر_٣} + \ldots + و_ن \overleftarrow{ر_ن}}{و_١ + و_٢ + و_٣ + \ldots + و_ن}$$

$\because و_١ = ك_١ ء$ ، $و_٢ = ك_٢ ء$ ، .... ، $و_ن = ك_ن ء$

$$\therefore \overleftarrow{ر} = \frac{ك_١ \overleftarrow{ر_١} + ك_٢ \overleftarrow{ر_٢} + ك_٣ \overleftarrow{ر_٣} + \ldots + ك_ن \overleftarrow{ر_ن}}{ك_١ + ك_٢ + ك_٣ + \ldots + ك_ن}$$

ومن العلاقة الإتجاهية السابقة يمكن كتابة المركبات فى إتجاهى المحورين س ، ص فنحصل على:

$$س_م = \frac{ك_١ س_١ + ك_٢ س_٢ + ك_٣ س_٣ + \ldots + ك_ن س_ن}{ك_١ + ك_٢ + ك_٣ + \ldots + ك_ن}$$

،

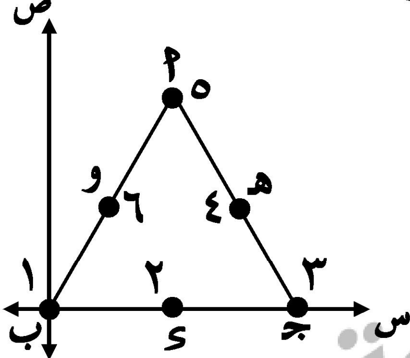
$$ص_م = \frac{ك_١ ص_١ + ك_٢ ص_٢ + ك_٣ ص_٣ + \ldots + ك_ن ص_ن}{ك_١ + ك_٢ + ك_٣ + \ldots + ك_ن}$$

مثـــال:

أب جـ مثلث متساوى الأضلاع طول ضلعه ٤ ديسيمتر ، النقط ء ، هـ ، و منتصفات أضلاعه $\overline{بجـ}$ ، $\overline{جـأ}$ ، $\overline{أب}$ على الترتيب ، وضعت الأثقال ٥ ، ١ ، ٣ ، ٢ ، ٤ ، ٦ ث كجم عند النقط أ ، ب ، جـ ، ء ، هـ ، و على الترتيب أوجد مركز ثقل المجموعة من ب

الحـــل:

نعتبر أن أحد أضلاع المثلث ينطبق على محور السينات وأن نقطة الأصل تقع عند الرأس ب



حساب احداثيات النقط

أ = (٤جتا ٦٠° ، ٤جا ٦٠°) = (٢ ، ٢ $\sqrt{٣}$)

، و = (٢جتا ٦٠° ، ٢جا ٦٠°) = (١ ، $\sqrt{٣}$)

، هـ = (٢ $\sqrt{٣}$ جتا ٣٠° ، ٢ $\sqrt{٣}$ جا ٣٠°) = (٣ ، $\sqrt{٣}$)

، ب = (٠ ، ٠) ، جـ = (٤ ، ٠) ، ء = (٢ ، ٠)

ثم نكون جدول الإحداثيات كمايلى:

الثقل	٥ ث كجم	١ ث كجم	٣ ث كجم	٢ ث كجم	٤ ث كجم	٦ ث كجم
س	٢	٠	٤	٢	٣	١
ص	٢ $\sqrt{٣}$	٠	٠	٠	$\sqrt{٣}$	$\sqrt{٣}$

$$س_م = \frac{ك_١ س_١ + ك_٢ س_٢ + ك_٣ س_٣ + ك_٤ س_٤ + ك_٥ س_٥ + ك_٦ س_٦}{ك_١ + ك_٢ + ك_٣ + ك_٤ + ك_٥ + ك_٦}$$

$$= \frac{٥ \times ٢ + ١ \times ٠ + ٣ \times ٤ + ٢ \times ٢ + ٤ \times ٣ + ٦ \times ١}{٥ + ١ + ٣ + ٢ + ٤ + ٦} = \frac{٤٤}{٢١}$$

$$، ص_م = \frac{ك_١ ص_١ + ك_٢ ص_٢ + ك_٣ ص_٣ + ك_٤ ص_٤ + ك_٥ ص_٥ + ك_٦ ص_٦}{ك_١ + ك_٢ + ك_٣ + ك_٤ + ك_٥ + ك_٦}$$

$$= \frac{٥ \times ٢\sqrt{٣} + ١ \times ٠ + ٣ \times ٠ + ٢ \times ٠ + ٤ \times \sqrt{٣} + ٦ \times \sqrt{٣}}{٥ + ١ + ٣ + ٢ + ٤ + ٦} = \frac{٢٠\sqrt{٣}}{٢١}$$

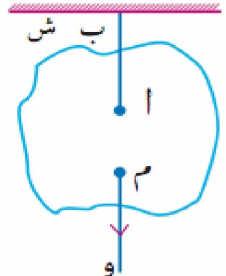
∴ مركز ثقل المجموعة هو $(\frac{٤٤}{٢١} ، \frac{٢٠\sqrt{٣}}{٢١}) \simeq (٢,١ ، ١,٦)$

التعليق الحر للجسم الجاسئ:

إذا علق جسم جاسئ من إحدى نقطه تعليقا حرا فإن مركز ثقله يقع على الخط الرأسى المار بنقطة التعليق لأن الجسم فى هذه الحالة يكون متزن تحت تأثير قوتين وهما:

١) الشد فى الخيط ٢) ثقل الجسم رأسياً لأسفل

وبالتالى فإن هاتين القوتين يجب أن تتساويا فى المقدار وتتضادا فى الإتجاه ويجمعهما خط عمل واحد



∴ مركز ثقل الجسم (م) لابد أن يقع على امتداد الخط الرأسى $\overleftrightarrow{\text{ب أ}}$

مركز ثقل القضبان والصفائح المنتظمة:

١) مركز ثقل قضيب منتظم الكثافة يقع عند نقطة منتصفه.

٢) مركز ثقل صفيحة رقيقة منتظمة على شكل متوازى أضلاع أو مستطيل أو معين أو مربع يقع عند مركزها الهندسى أى عند نقطة تقاطع القطرين.

٣) مركز ثقل صفيحة رقيقة منتظمة على شكل مثلث يقع عند نقطة تلاقى متوسطات المثلث.

٤) مركز ثقل صفيحة رقيقة منتظمة على شكل دائرة يقع عند مركز الدائرة.

٥) مركز ثقل ثلاث كتل متساوية موضوعة عند رؤوس مثلث ينطبق على مركز ثقل صفيحة رقيقة محدودة بهذا المثلث أى يقع عند نقطة تقاطع المتوسطات

ملاحظات هامة جدا:

١) يمكن إستخدام قواعد تعيين محصلة القوى المتوازية فى تعيين مركز ثقل الجسم.

٢) مركز ثقل الجسم الجاسئ يكون ثابتا ولايقع بالضرورة على أحد جسيمات هذا الجسم.

٣) مركز ثقل نقطتين ماديتين يقع على القطعة المستقيمة الواصلة بينهما ويقسمها بالنسبة العكسية لمقدار القوتين أى أن مركز الثقل يكون اقرب للكتلة الكبرى.

٤) يمكن توزيع وزن صفيحة رقيقة منتظمة على شكل مثلث أو متوازى أضلاع أو مستطيل أو معين أو مربع على رؤوسها بالتساوى.

٥) الصفائح المنتظمة السمك والكثافة تكون النسبة بين أوزانها = النسبة بين مساحة أسطحها.

٦) الأسلاك والقضبان المنتظمة السمك والكثافة تكون النسبة بين أوزانها = النسبة بين أطوالها.

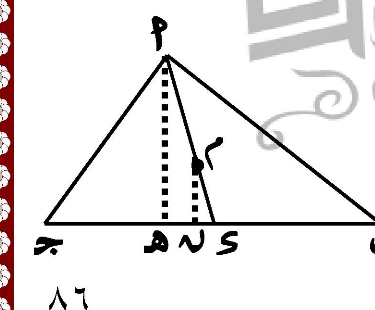
٧) الأطوال والمساحات والحجوم المتساوية تكون النسبة بين الأوزان = النسبة بين الكثافات.

تذكران:

١) نقطة تقاطع المتوسطات تقسم المتوسط بنسبة ١ : ٢ من جهة القاعدة

أى أنه فى Δ أ ب جـ إذا كان أ د متوسط ، م نقطة تقاطع المتوسطات فإن:

$\text{م د} = \frac{1}{2}\,\text{أ م}$ ، $\boxed{\text{م د} = \frac{1}{3}\,\text{أ د}}$ $\Leftarrow$ $\text{أ م} = 2\,\text{م د}$ ، $\boxed{\text{أ د} = 3\,\text{م د}}$



وبالتالى يكون:

إرتفاع المثلث النازل على ضلع ما = ٣ أمثال العمود النازل من نقطة تقاطع المتوسطات على هذا الضلع

أى أن $م ن = \frac{1}{3} أ هـ \Leftarrow أ هـ = 3 م ن$

٢) **إحداثيات منتصف قطعة مستقيمة $\overline{أب}$ حيث أ = (س$_1$، ص$_1$)، ب = (س$_2$، ص$_2$) هى:**

$$\text{إحداثيات المنتصف} = \left(\frac{س_1 + س_2}{2}، \frac{ص_1 + ص_2}{2}\right)$$

٣) **نقطة تقاطع المتوسطات فى المثلث الذى رؤوسه (س$_1$، ص$_1$)، (س$_2$، ص$_2$) ، (س$_3$، ص$_3$)هى:**

$$م = \left(\frac{س_1 + س_2 + س_3}{3}، \frac{ص_1 + ص_2 + ص_3}{3}\right)$$

٤) **نقطة تقاطع القطرين فى متوازى الإضلاع أو حالاته الخاصة حيث إحداثيات الرؤوس أ(س$_1$،ص$_1$) ، ب(س$_2$،ص$_2$) ، جـ(س$_3$،ص$_3$) ، ى(س$_4$،ص$_4$) على الترتيب هى منتصف أحد القطرين أى أن:**

نقطة تقاطع القطرين م = منتصف القطر $\overline{أجـ}$ أو منتصف القطر $\overline{بى}$

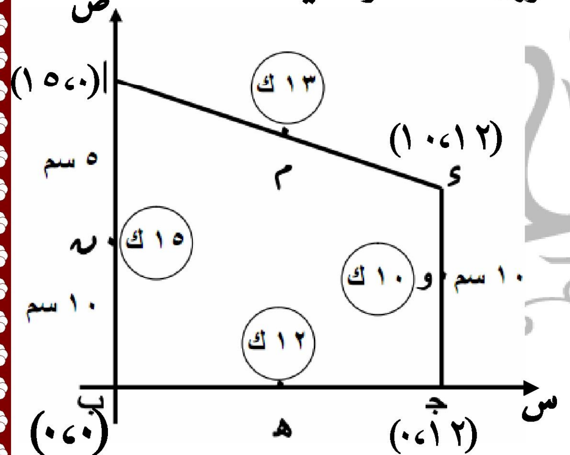
$$\therefore م = \left(\frac{س_1 + س_3}{2}، \frac{ص_1 + ص_3}{2}\right) \quad \text{أو} \quad م = \left(\frac{س_2 + س_4}{2}، \frac{ص_2 + ص_4}{2}\right)$$

مثـــال:

سلك رفيع منتظم السمك والكثافة على شكل شبه منحرف أ ب جـ ى فيه أ ب = ١٥ سم ، ب جـ = ١٢ سم ، جـ ى = ١٠ سم ، ق(< أ ب جـ) = ق(< ب جـ ى) = ٩٠° . أوجد بعد مركز ثقل هذا السلك عن الضلعين $\overline{أب}$، $\overline{بجـ}$

الحـــل:

نعتبر أن الرأس ب عند نقطة الأصل والضلعين $\overline{أب}$ ، $\overline{بجـ}$ على محورى الصادات و السينات



∵ السلك منتظم السمك والكثافة

∴ النسبة بين الكتل = النسبة بين الأطوال

أى أن:

كتلة أب : كتلة ب جـ : كتلة جـ ى : كتلة أ ى

= ١٥ : ١٢ : ١٠ : ١٣

∴ كتلة أب = ١٥ك ، كتلة ب جـ = ١٢ك

، كتلة جـ ى = ١٠ك ، كتلة أ ى = ١٣ك

وكتلة كل ضلع تؤثر فى منتصفه لأن السلك منتظم

ثم نكون جدول الإحداثيات كمايلى:

النقطة	هـ	و	م	ن
الكتلة	١٢ك	١٠ك	١٣ك	١٥ك
س	٦	١٢	٦	٠
ص	٠	٥	١٢,٥	٧,٥

$$\therefore س_م = \frac{ك_١س_١ + ك_٢س_٢ + ك_٣س_٣ + ك_٤س_٤}{ك_١ + ك_٢ + ك_٣ + ك_٤}$$

$$= \frac{١٢ك \times ٦ + ١٠ك \times ١٢ + ١٣ك \times ٦ + ١٥ك \times ٠}{١٢ك + ١٠ك + ١٣ك + ١٥ك} = \frac{٢٧٠ك}{٥٠ك} = ٥,٤$$

$$، ص_م = \frac{ك_١ص_١ + ك_٢ص_٢ + ك_٣ص_٣ + ك_٤ص_٤}{ك_١ + ك_٢ + ك_٣ + ك_٤}$$

$$= \frac{١٢ك \times ٠ + ١٠ك \times ٥ + ١٣ك \times ١٢,٥ + ١٥ك \times ٧,٥}{١٢ك + ١٠ك + ١٣ك + ١٥ك} = \frac{٣٢٥ك}{٥٠ك} = ٦,٥$$

∴ مركز ثقل المجموعة هو (٥,٤ ، ٦,٥)

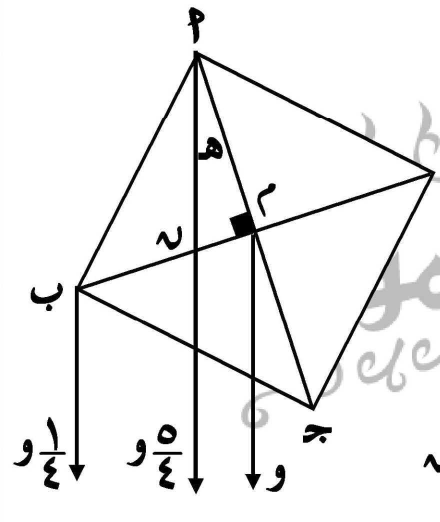
أى أن مركز الثقل يبعد ٥,٤ سم عن الضلع $\overline{أب}$ ويبعد ٦,٥ سم عن الضلع $\overline{بجـ}$

مثـــال:

علقت صفيحة مربعة منتظمة وزنها (و) تعليقاً حراً من الرأس أ وثبت عند الرأس ب ثقل وزنه $\frac{١}{٤}$و

اثبت أن ظل زاوية ميل القطر $\overline{أجـ}$ على الرأسى فى وضع الإتزان يساوى $\frac{١}{٥}$

الحـــل:



قبل تثبيت الثقل عند ب يكون وزن الصفيحة (و) يؤثر عند نقطة م

وبعد تثبيت الثقل $\frac{١}{٤}$و يكون وزن الصفيحة $\frac{٥}{٤}$و

ويصبح مركز الثقل بين النقطتين م ، ب

∵ الصفيحة علقت تعليقا حرا من أ

∴ مركز الثقل يقع على الخط الرأسى المار بنقطة أ

∴ مركز الثقل هو نقطة تقاطع الخط الراسى مع $\overline{مب}$ أى نقطة ن

∴ و × م ن = $\frac{١}{٤}$و × ن ب ∴ م ن : ن ب = ١ : ٤ ∴ م ب = ٥ م ن

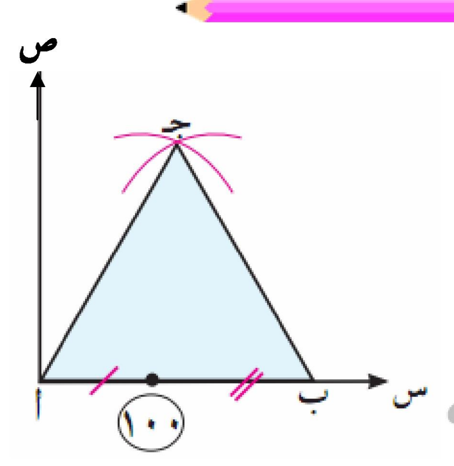
∵ الصفيحة على شكل مربع ∴ $أم \perp مب$ ، $أم = مب$ ∴ $أم = ٥ مه$

∴ ظل زاوية ميل القطر $\overline{أجـ}$ على الرأسى = ظاهـ = $\frac{مه}{أم} = \frac{مه}{٥ مه} = \frac{١}{٥}$

مثـــال:

فى الشكل المقابل:

صفيحة رقيقة كتلتها ٣٠٠ جرام على شكل مثلث متساوى الأضلاع أ ب جـ طول ضلعه ١٢ سم الصقت كتلة ١٠٠ جم فى الصفيحة عند نقطة تثليث $\overline{أب}$. عين مركز ثقل الصفيحة بالنسبة للمحورين المتعامدين $\overleftarrow{أس}$ ، $\overleftarrow{أص}$



الحـــل:

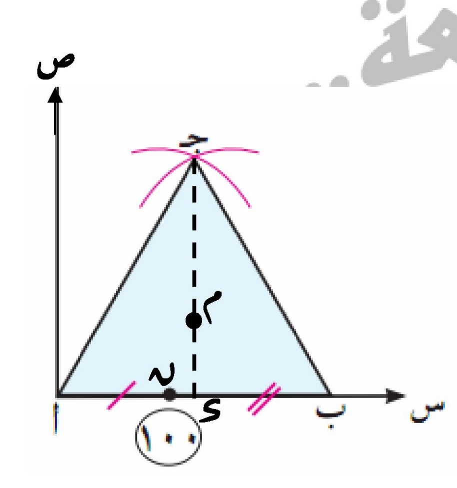
قبل الصاق الكتلة ١٠٠ جم يكون مركز ثقل الصفيحة عند نقطة م

∵ المثلث متساوى الأضلاع ∴ جـ ء = ١٢ جا ٦٠° = $٦\sqrt{٣}$

∵ م نقطة تقاطع المتوسطات ∴ م ء = $\frac{١}{٣}$ جـ ء = $٢\sqrt{٣}$

بعد الصاق الكتلة ١٠٠ جم عند ه حيث أ ه = $\frac{١}{٣}$ أ ب = ٤ سم

ثم نكون جدول الإحداثيات كمايلى:



النقطة	م	ه
الكتلة	٣٠٠	١٠٠
س	٦	٤
ص	$٢\sqrt{٣}$	٠

∴ $س_م = \frac{ك_١ س_١ + ك_٢ س_٢}{ك_١ + ك_٢} = \frac{٣٠٠ \times ٦ + ١٠٠ \times ٤}{٣٠٠ + ١٠٠} = \frac{٢٢٠٠}{٤٠٠} = \frac{١١}{٢} = ٥,٥$

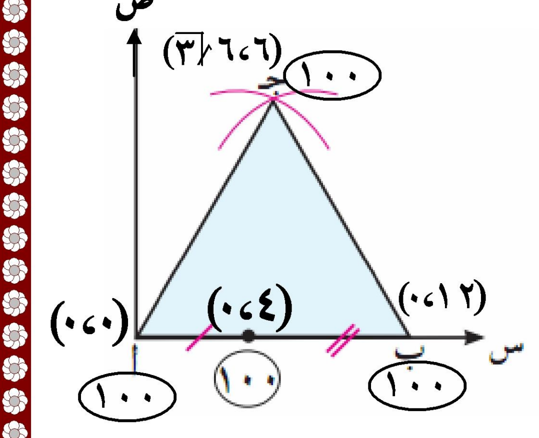
، $ص_م = \frac{ك_١ ص_١ + ك_٢ ص_٢}{ك_١ + ك_٢} = \frac{٣٠٠ \times ٢\sqrt{٣} + ١٠٠ \times ٠}{٣٠٠ + ١٠٠} = \frac{٦٠٠\sqrt{٣}}{٤٠٠} = \frac{٣\sqrt{٣}}{٢} \simeq ٢,٦$

∴ مركز ثقل الصفيحة هو (٥,٥ ، ٢,٦)

أى أن مركز الثقل يبعد ٢,٦ سم عن المحور $\overleftarrow{أس}$ ويبعد ٥,٥ سم عن المحور $\overleftarrow{أص}$

حل آخر:

بتوزيع كتلة الصفيحة على الرؤوس الثلاثة للمثلث



ثم نكون جدول الإحداثيات كمايلى:

النقطة	أ	ء	ب	جـ
الكتلة	١٠٠	١٠٠	١٠٠	١٠٠
س	٠	٤	١٢	٦
ص	٠	٠	٠	٦ √٣

$$\therefore س_م = \frac{ك_١ س_١ + ك_٢ س_٢ + ك_٣ س_٣ + ك_٤ س_٤}{ك_١ + ك_٢ + ك_٣ + ك_٤}$$

$$= \frac{١٠٠ \times ٠ + ١٠٠ \times ٤ + ١٠٠ \times ١٢ + ١٠٠ \times ٦}{١٠٠ + ١٠٠ + ١٠٠ + ١٠٠} = \frac{٢٢٠٠}{٤٠٠} = \frac{١١}{٢} = ٥,٥$$

$$\therefore ص_م = \frac{ك_١ ص_١ + ك_٢ ص_٢ + ك_٣ ص_٣ + ك_٤ ص_٤}{ك_١ + ك_٢ + ك_٣ + ك_٤}$$

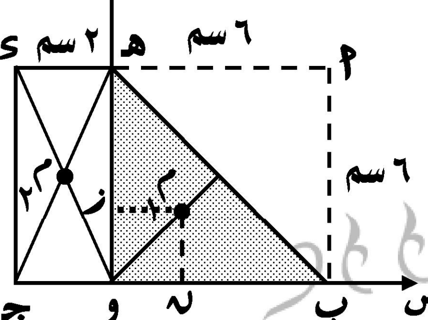
$$= \frac{١٠٠ \times ٠ + ١٠٠ \times ٠ + ١٠٠ \times ٠ + ١٠٠ \times ٦\sqrt{٣}}{١٠٠ + ١٠٠ + ١٠٠ + ١٠٠} = \frac{٦٠٠\sqrt{٣}}{٤٠٠} = \frac{٣\sqrt{٣}}{٢} \simeq ٢,٦$$

∴ مركز ثقل الصفيحة هو (٥,٥ ، ٢,٦)

أى أن مركز الثقل يبعد ٢,٦ سم عن المحور $\overleftrightarrow{أس}$ ويبعد ٥,٥ سم عن المحور $\overleftrightarrow{أص}$

مثـــال:

صفيحة رقيقة منتظمة الكثافة على شكل مستطيل أ ب جـ ء فيه أ ب = ٦ سم ، ب جـ = ٨ سم ، هـ ∈ $\overline{أء}$ بحيث أ هـ = ٦ سم ، ثنى المثلث أ ب هـ حول الضلع $\overline{ب هـ}$ حتى إنطبق $\overline{أب}$ على $\overline{ب جـ}$ تماما عين مركز ثقل الصفيحة بعد ثنيها بالنسبة إلى $\overleftrightarrow{جب}$ ، $\overleftrightarrow{جء}$



الحـــل:

∵ الصفيحة منتظمة الكثافة

∴ النسبة بين الكتل = النسبة بين المساحات

∵ مساحة المربع أ ب و هـ : مساحة المستطيل هـ و جـ ء = ٣٦ : ١٢ = ٣ : ١

∴ كتلة المربع أ ب جـ ء = ٣ ك ، كتلة المستطيل هـ و جـ ء = ك

بعد ثنى المثلث أ ب هـ وباعتبار $\overleftrightarrow{وس}$ ، $\overleftrightarrow{وص}$ محورين متعامدين كما بالشكل

الجزء المثلث هـ و ب المكون من طبقتين كتلته ٣ ك وتؤثر عند نقطة متوسطات المثلث $م_١$

والجزء المستطيل هـ و جـ ء كتلته ك وتؤثر عند نقطة تقاطع القطرين $م_٢$ حيث $م_٢$ = (−١ ، ٣)

∴ و = (٠،٠) ، ب = (٦،٠) ، هـ = (٠،٦) $\therefore م_١ = \left(\frac{٠ + ٦ + ٠}{٣} ، \frac{٠ + ٠ + ٦}{٣}\right) = (٢ ، ٢)$

النقطة	$م_١$	$م_٢$
الكتلة	٣ك	ك
س	٢	١−
ص	٢	٣

$$\therefore س_م = \frac{ك_١ س_١ + ك_٢ س_٢}{ك_١ + ك_٢} = \frac{٣ك \times ٢ + ك \times (-١)}{٣ك + ك} = \frac{٥ك}{٤ك} = \frac{٥}{٤} = ١,٢٥$$

$$، ص_م = \frac{ك_١ ص_١ + ك_٢ ص_٢}{ك_١ + ك_٢} = \frac{٣ك \times ٢ + ك \times ٣}{٣ك + ك} = \frac{٩ك}{٤ك} = \frac{٩}{٤} = ٢,٢٥$$

∴ مركز ثقل الصفيحة هو (١,٢٥ ، ٢,٢٥)

أى أن مركز الثقل يبعد ٢,٢٥ سم عن $\overleftarrow{جب}$ ويبعد (١,٢٥ + ٢) اى ٣,٢٥ سم عن $\overleftarrow{جى}$

مثـــال:

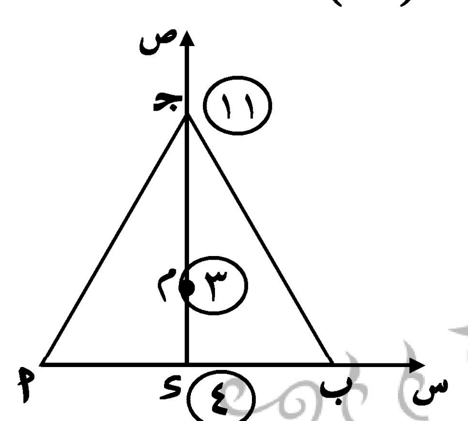
أب جـ صفيحة على شكل مثلث متساوى الأضلاع كتلتها ٣ كجم ، م مركز ثقلها وضعت كتل مقاديرها ٢، ٢، ١١ كجم عند الرؤوس أ ، ب ، جـ على الترتيب برهن أن مركز ثقل المجموعة يقع عند منتصف $\overline{مجـ}$

الحـــل:

باعتبار ى نقطة الأصل ، $\overleftrightarrow{أب}$ على محور السينات ، $\overleftrightarrow{جى}$ على محور الصادات وبفرض أن طول $جى = ٣ل$

∴ ى = (٠،٠) ، جـ = (٠، ٣ل) ، ∵ مى = $\frac{١}{٣}$ جى ∴ م = (٠، ل)

∴ منتصف $\overline{مجـ}$ = (٠، ٢ل) ← (١)



محصلة الكتلتين ٢ ، ٢ كجم تساوى ٤ كجم عند نقطة ى

ثم نكون جدول الإحداثيات كمايلى:

النقطة	ى	جـ	م
الكتلة	٤	١١	٣
س	٠	٠	٠
ص	٠	٣ل	ل

$$\therefore س_م = ٠ \quad ، \quad ص_م = \frac{٤ \times ٠ + ١١ \times ٣ل + ٣ \times ل}{٤ + ١١ + ٣} = \frac{٣٦ل}{١٨} = ٢ل$$

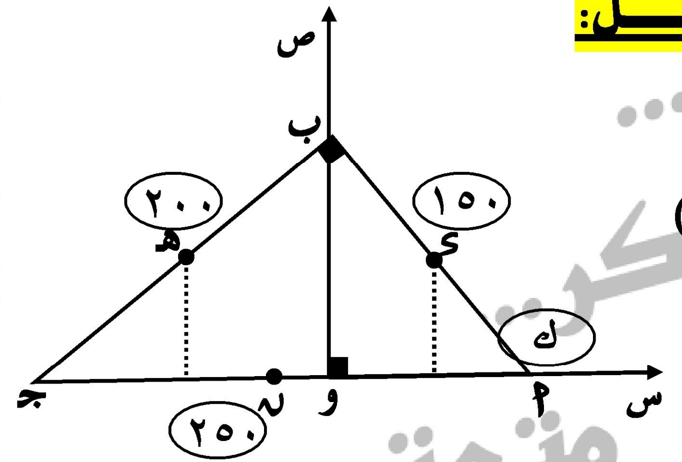
∴ مركز ثقل المجموعة هو (٠، ٢ل) ← (٢)

من (١) ، (٢) ∴ مركز ثقل المجموعة يقع عند منتصف $\overline{مجـ}$

مثـــال:

سلك منتظم السمك والكثافة طوله ١٢٠ سم وكتلته ٦٠٠جرام . ثنى على شكل مثلث قائم الزاوية فى ب حيث اب = ٣٠ سم إذا ثبتت كتلة ك جرام عند الرأس ا ثم علق السلك تعليقا حراً من الرأس ب فإتزن عندما كانت $\overline{اجـ}$ أفقية فأوجد ك.

الحـــل:



∵ المثلث قائم الزاوية فى ب ، اب = ٣٠

∴ اجـ + بجـ = ١٢٠ − ٣٠ = ٩٠ (١)

، ∴ $(اجـ)^2 - (بجـ)^2 = (٣٠)^2 = ٩٠٠$ (٢)

بحل المعادلتين (١) ، (٢)

∴ اجـ = ٥٠ سم ، بجـ = ٤٠ سم

∵ $\overline{اجـ}$ أفقى عند الإتزان ∴ $\overline{بو} \perp \overline{اجـ}$

∴ بو $= \frac{٣٠ \times ٤٠}{٥٠} = ٢٤$ سم

∴ او $= \sqrt{(٣٠)^2 - (٢٤)^2} = ١٨$ سم ∴ وجـ = ٣٢ سم ، ون = ٧ سم

∵ السلك منتظم السمك والكثافة ∴ كتلة وحدة الأطوال $= \frac{٦٠٠}{١٢٠} = ٥$ جم

∴ كتلة اب = ٣٠ × ٥ = ١٥٠ جم ، كتلة بجـ = ٤٠ × ٥ = ٢٠٠ جم

، كتلة اجـ = ٥٠ × ٥ = ٢٥٠ جم وهذه الكتل تؤثر فى منتصفات الأضلاع لأن السلك منتظم

باعتبار $\overleftrightarrow{وا}$ ، $\overleftrightarrow{وب}$ محورى الإحداثيات كما بالشكل ∴ و = (٠، ٠)

ثم نكون جدول الإحداثيات كمايلى:

النقطة	ا	ى	هـ	ن
الكتلة	ك	١٥٠	٢٠٠	٢٥٠
س	١٨	٩	−١٦	−٧
ص	٠	١٢	١٢	٠

∵ مركز الثقل يقع على الخط الراسى المار بنقطة التعليق ب ∴ $س_م = ٠$

∴ $\frac{ك \times ١٨ + ١٥٠ \times ٩ + ٢٠٠ \times (-١٦) + ٢٥٠ \times (-٧)}{ك + ٦٠٠} = ٠$

∴ ١٨ك + ١٣٥٠ − ٣٢٠٠ − ١٧٥٠ = ٠ ∴ ١٨ك − ٣٦٠٠ = ٠

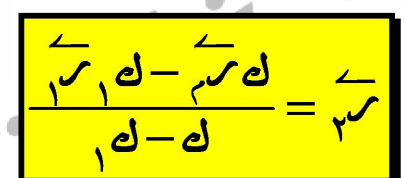
∴ ١٨ك = ٣٦٠٠ ∴ ك $= \frac{٣٦٠٠}{١٨} = ٢٠٠$ جم

٦ - ٢ طريقة الكتلة السالبة

طريقة الكتلة السالبة:

إذا كان الجسم كتلته ك ومركز ثقله م واقتطعنا منه جزء كتلته $ك_١$ ومركز ثقله $م_١$ فإن كتلة الجزء الباقى تكون $ك - ك_١$ ويكون مركز ثقله $م_٢$ فإذا كان

$\overleftarrow{ر_١}$ ، $\overleftarrow{ر_٢}$ ، $\overleftarrow{ر_م}$ متجهات موضع $م_١$ ، $م_٢$ ، م فإن:



$$\overleftarrow{ر_٢} = \frac{ك \overleftarrow{ر_م} - ك_١ \overleftarrow{ر_١}}{ك - ك_١}$$

وبالتعويض عن $\overleftarrow{ر_١}$ ، $\overleftarrow{ر_م}$ بمركباتهما الجبرية نحصل على إحداثيات مركز ثقل الجزء المتبقى وهما:

$$س_٢ = \frac{ك س - ك_١ س_١}{ك - ك_١} \quad ، \quad ص_٢ = \frac{ك ص - ك_١ ص_١}{ك - ك_١}$$

حيث:

(س ، ص) مركز ثقل الجسم الأصلى وكتلته ك ، ($س_١$ ، $ص_١$) مركز ثقل الجزء المقتطع وكتلته $ك_١$

أى أن

احداثى مركز ثقل الجسم المتبقى =

$$\frac{\text{الكتلة الكلية} \times \text{احداثى مركز ثقلها} - \text{الكتلة المقتطعة} \times \text{احداثى مركز ثقلها}}{\text{الفرق بين الكتلتين}}$$

مثـــال:

وضعت ٥ كتل متساوية عند الرؤوس أ ، ب ، جـ ، ء ، هـ لمربع أ ب جـ ء حيث هـ ملتقى قطريه وطول ضلع المربع ١٢ سم ، عين مركز ثقل المجموعة. وإذا رفعت الكتلة الموجودة عند ب فعين مركز ثقل المجموعة المتبقية بالنسبة للمحورين $\overleftrightarrow{أب}$ ، $\overleftrightarrow{أء}$.

الحـــل:

نأخذ $\overleftrightarrow{أب}$ ، $\overleftrightarrow{أء}$ محورين متعامدين باعتبار أ نقطة الأصل

نفرض أن الكتل المتساوية مقدار كل منها ك

ص ، ى ، جـ ، هـ ، أ ، ب ، س ، ١٢ سم

بتكوين جدول الإحداثيات

النقطة	أ	ب	جـ	ى	هـ
الكتلة	ك	ك	ك	ك	ك
س	٠	١٢	١٢	٠	٦
ص	٠	٠	١٢	١٢	٦

$$\therefore س_م = \frac{ك_1 س_1 + ك_2 س_2 + ك_3 س_3 + ك_4 س_4 + ك_5 س_5}{ك_1 + ك_2 + ك_3 + ك_4 + ك_5}$$

$$= \frac{ك \times ٠ + ك \times ١٢ + ك \times ١٢ + ك \times ٠ + ك \times ٦}{ك + ك + ك + ك + ك} = \frac{٣٠ ك}{٥ ك} = ٦$$

$$، ص_م = \frac{ك_1 ص_1 + ك_2 ص_2 + ك_3 ص_3 + ك_4 ص_4 + ك_5 ص_5}{ك_1 + ك_2 + ك_3 + ك_4 + ك_5}$$

$$= \frac{ك \times ٠ + ك \times ٠ + ك \times ١٢ + ك \times ١٢ + ك \times ٦}{ك + ك + ك + ك + ك} = \frac{٣٠ ك}{٥ ك} = ٦$$

∴ مركز ثقل المجموعة هو (٦ ، ٦)

بعد رفع الكتلة الموجودة عند ب

$$\therefore س_2 = \frac{ك س - ك_1 س_1}{ك - ك_1} = \frac{٥ ك \times ٦ - ك \times ١٢}{٥ ك - ك} = \frac{١٨ ك}{٤ ك} = \frac{٩}{٢} = ٤,٥$$

$$، ص_2 = \frac{ك ص - ك_1 ص_1}{ك - ك_1} = \frac{٥ ك \times ٦ - ك \times ٠}{٥ ك - ك} = \frac{٣٠ ك}{٤ ك} = \frac{١٥}{٢} = ٧,٥$$

∴ مركز ثقل المجموعة المتبقية هو (٤,٥ ، ٧,٥)

مركز ثقل بعض الأجسام التى لها خصائص تماثل:

- إذا وجد محور تماثل هندسى لصفيحة رقيقة منتظمة الكثافة فإن مركز ثقلها يقع على هذا المحور.
- إذا وجد مستوى تماثل هندسى لمجسم منتظم الكثافة فإن مركز ثقله يقع فى هذا المستوى.
- **مركز ثقل بعض الحالات الخاصة:**

١) مركز ثقل سلك منتظم الكثافة على هيئة دائرة يقع فى مركز الدائرة.
٢) مركز ثقل صفيحة منتظمة الكثافة على شكل دائرة يقع فى مركز الدائرة.
٣) مركز ثقل قشرة كروية منتظمة الكثافة يقع فى مركز الكرة.
٤) مركز ثقل كرة مصمته منتظمة الكثافة يقع فى مركز الكرة.
٥) مركز ثقل مجسم منتظم الكثافة على هيئة متوازى مستطيلات يقع فى مركزه الهندسى.

٦) مركز ثقل قشرة اسطوانية دائرية قائمة منتظمة الكثافة يقع عند نقطة منتصف محورها.

٧) مركز ثقل اسطوانية دائرية قائمة مصمته منتظمة الكثافة يقع عند نقطة منتصف محورها.

٨) مركز ثقل منشور قائم منتظم يقع عند نقطة منتصف المحور الموازى لأحرفه الجانبية والمار بمركزى ثقل قاعدتيه باعتبارهما صفيحتين رقيقتين منتظمتى الكثافة.

مثال:

صفيحة رقيقة منتظمة السمك والكثافة على شكل قرص دائرى مركزه نقطة الأصل وطول نصف قطره ٦ وحدات طول ، قطع منه قرصان دائريان مركز احدهما (−١ ، −٣) وطول نصف قطره وحدة طول ومركز الآخر (١ ، ٢) وطول نصف قطره ٣ وحدات طول. أوجد مركز ثقل الجزء الباقى من القرص الأصلى.

الحل:

∵ مساحة القرص الأصلى $= \pi (٦)^٢ = ٣٦\pi$

، مساحة القرص الأول $= \pi$ ، مساحة القرص الثانى $= ٩\pi$

وبفرض كتلة القرص الأصلى $= ٣٦$ ك

∴ كتلة القرص الأول $ك_١ = -ك$ ، كتلة القرص الثانى $ك_٢ = -٩ك$

$$∴ س_م = \frac{ك س - ك_١ س_١ - ك_٢ س_٢}{ك - ك_١ - ك_٢}$$

$$= \frac{٣٦ك \times ٠ - ك \times (-١) - ٩ك \times ١}{٣٦ك - ك - ٩ك} = \frac{-٨ك}{٢٦ك} = \frac{-٤}{١٣}$$

$$، ص_م = \frac{ك ص - ك_١ ص_١ - ك_٢ ص_٢}{ك - ك_١ - ك_٢} = \frac{٣٦ك \times ٠ - ك \times (-٣) - ٩ك \times ٢}{٣٦ك - ك - ٩ك} = \frac{-١٥ك}{٢٦ك} = \frac{-١٥}{٢٦}$$

∴ مركز ثقل المجموعة المتبقية هو $\left(\frac{-٤}{١٣} ، \frac{-١٥}{٢٦}\right)$

مثال:

صفيحة رقيقة منتظمة على شكل مستطيل أ ب جـ د الذى فيه أ ب = ٦ سم ، ب جـ = ٨ سم ، قطعت منه قطعة مربعة الشكل من الرأس ب طول ضلعها ٤ سم ، أوجد بعد مركز ثقل الجزء الباقى عن كل من $\overline{جـ د}$ ، $\overline{جـ ب}$ ثم إذا علق الجزء الباقى تعليقا حرا من الراس جـ فأوجد فى وضع التوازن ظل زاوية ميل $\overline{جـ ب}$ على الرأسى.

الحل:

نأخذ $\overleftrightarrow{جب}$ ، $\overleftrightarrow{جد}$ محورين متعامدين باعتبار جـ نقطة الأصل

∵ مساحة المستطيل = ٨ × ٦ = ٤٨ سم^{٢}

ومساحة المربع = ٤ × ٤ = ١٦ سم^{٢}

بفرض كتلة المستطيل = ك

∴ كتلة المربع المقطوع $ك_{١} = \frac{١٦}{٤٨} ك = \frac{١}{٣} ك$

مركز ثقل المستطيل هو نقطة تقاطع القطرين (٤ ، ٣)

مركز ثقل المربع هو نقطة تقاطع القطرين (٦ ، ٢)

بتكوين جدول الإحداثيات

الشكل	المستطيل	المربع
الكتلة	ك	$\frac{١}{٣}$ ك
س	٤	٦
ص	٣	٢

$$∴ س_{م} = \frac{ك س - ك_{١} س_{١}}{ك - ك_{١}} = \frac{ك × ٤ - \frac{١}{٣} ك × ٦}{ك - \frac{١}{٣} ك} = \frac{٢ ك}{\frac{٢}{٣} ك} = \frac{٦}{٢} = ٣$$

$$، ص_{م} = \frac{ك ص - ك_{١} ص_{١}}{ك - ك_{١}} = \frac{ك × ٣ - \frac{١}{٣} ك × ٢}{ك - \frac{١}{٣} ك} = \frac{\frac{٧}{٣} ك}{\frac{٢}{٣} ك} = \frac{٧}{٢} = ٣,٥$$

∴ مركز ثقل الجزء الباقي هو (٣ ، ٣,٥)

وبفرض ى زاوية ميل $\overline{جب}$ على الرأسى

$$∵ ظا ى = \frac{ص_{م}}{س_{م}} \quad ∴ ظا ى = \frac{٣,٥}{٣} = \frac{٧}{٦} \quad ∴ ق(\angle ى) = ظا^{-١}(\frac{٧}{٦}) = ٥٦'' \; ٢٣' \; ٤٩^{\circ}$$

مثـــال:

صفيحة رقيقة على شكل مثلث متساوى الساقين أ ب جـ فيه أ ب = أ جـ ، $\overline{أ د}$ هو إرتفاع المثلث وطوله ٤٥ سم.رسم مستقيم يوازى القاعدة $\overline{ب جـ}$ ويمر بمركز ثقل الصفيحة فقطع $\overline{أ ب}$ ، $\overline{أ جـ}$ فى النقطتين هـ ، و على الترتيب . اثبت أن مركز ثقل الشكل الرباعى هـ ب جـ و يقع على $\overline{أ د}$ وبعد ٧ سم عن نقطة د .

الحـــل:

∵ المثلث متساوى الساقين ، $\overline{هـ و} // \overline{ب جـ}$

∴ هـ ب = و جـ ∴ هـ ب جـ و شبه منحرف متساوى الساقين

∴ $\overline{\text{أى}}$ محور تماثل شبه المنحرف هـ ب جـ و

∴ مركز ثقل الشكل الرباعى هـ ب جـ و يقع على $\overline{\text{أى}}$

∵ الصفيحة منتظمة الكثافة

∴ النسبة بين الكتل = النسبة بين المساحات

مركز ثقل الصفيحة هو م نقطة تقاطع المتوسطات

∴ $\frac{\text{أم}}{\text{أى}} = \frac{\text{أهـ}}{\text{أب}} = \frac{٢}{٣}$ ∵ $\overline{\text{هـ و}} \,//\, \overline{\text{ب جـ}}$

∴ ∆∆ أهـ و ، أب جـ متشابهان

∴ $\frac{\text{م}(\Delta\text{أهـ و})}{\text{م}(\Delta\text{أب جـ})} = \left(\frac{٢}{٣}\right)^{٢} = \frac{٤}{٩}$

بفرض أن كتلة ∆أب جـ = ٩ك ∴ كتلة ∆أهـ و = ٤ك

نأخذ $\overleftrightarrow{\text{ىب}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ىأ}}$ محورين متعامدين باعتبار ى نقطة الأصل

∵ مى = $\frac{١}{٣}$ أى ∴ مى = ١٥سم ∴ أم = ٣٠سم ∴ م $م_{١}$ = $\frac{١}{٣}$ أم = ١٠سم

∴ م = (٠، ١٥) ، $م_{١}$ = (٠، ٢٥)

وبتكوين جدول الإحداثيات

النقطة	م	$م_{١}$
الوزن	٩ك	− ٤ك
س	٠	٠
ص	١٥	٢٥

∴ $ص_{م} = \frac{ك ص - ك_{١} ص_{١}}{ك - ك_{١}} = \frac{٩ك \times ١٥ - ٤ك \times ٢٥}{٩ك - ٤ك} = \frac{١٣٥ك - ١٠٠ك}{٥ك} = \frac{٣٥}{٥} = ٧$

∴ مركز ثقل الشكل الرباعى هو $م_{٢}$ = (٠، ٧)

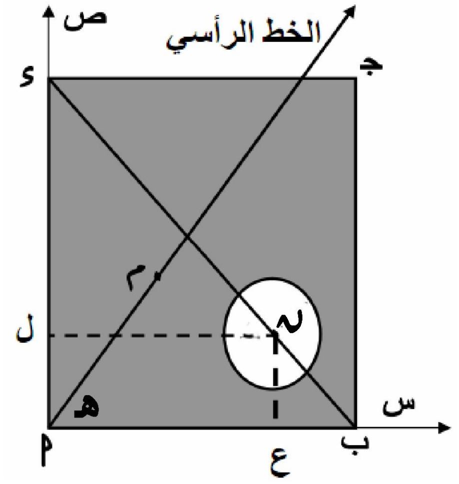
∴ مركز ثقل الشكل الرباعى يبعد ٧ سم عن نقطة ى

مثال:

صفيحة رقيقة منتظمة محدودة بالمربع أب جـ ى الذى طول ضلعه ٤٠ سم،ثقبت ثقبا دائريا مساحته ١٠٠سم^{٢} ومركزه عند نقطة على القطر $\overline{\text{بى}}$ وتقسمه من الداخل بنسبة ١ : ٤ من ناحية ب ثم علقت تعليقا حرا من الراس أ . عين زاوية قياس الضلع $\overline{\text{أب}}$ على الرأسى فى وضع الإتزان.

الحل:

∵ بن : نى = ١ : ٤ ∴ بن : بى = ١ : ٥



∴ من تشابه ΔΔ ب ع ن ، ب أ ء نجد أن:

$\frac{ب ع}{ب أ} = \frac{ع ن}{أ ء} = \frac{ب ن}{ب ء}$ ∴ $\frac{ب ع}{٤٠} = \frac{ع ن}{٤٠} = \frac{١}{٥}$

∴ ب ع = ع ن = $\frac{٤٠}{٥}$ = ٨ ∴ أ ع = ٤٠ − ٨ = ٣٢

مركز ثقل الثقب الدائرى ن = (٣٢ ، ٨)

∵ الصفيحة منتظمة الكثافة

∴ النسبة بين الكتل = النسبة بين المساحات

، ∵ مساحة المربع = ٤٠ × ٤٠ = ١٦٠٠ سم^2

ومساحة الثقب = ١٠٠ سم^2 ∴ مساحة المربع : مساحة الثقب = ١٦ : ١

بفرض كتلة المربع = ١٦ ك ∴ كتلة الثقب الدائرى المقطوع = − ك

نأخذ $\overleftrightarrow{أب}$ ، $\overleftrightarrow{أء}$ محورين متعامدين باعتبار أ نقطة الأصل

وبتكوين جدول الإحداثيات

الشكل	المربع	الدائرة
الكتلة	١٦ ك	− ك
س	٢٠	٣٢
ص	٢٠	٨

∴ $س_م = \frac{١٦ك × ٢٠ − ك × ٣٢}{١٦ك − ك} = \frac{٣٢٠ك − ٣٢ك}{١٥ك} = \frac{٢٨٨}{١٥} = ١٩٫٢$

، $ص_م = \frac{١٦ك × ٢٠ − ك × ٨}{١٦ك − ك} = \frac{٣٢٠ك − ٨ك}{١٥ك} = \frac{٣١٢}{١٥} = ٢٠٫٨$

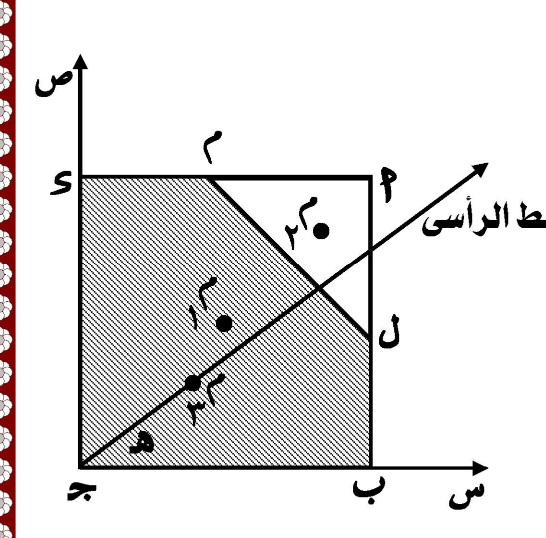
وبفرض هـ زاوية ميل $\overline{أب}$ على الرأسى

∵ ظا هـ = $\frac{ص_م}{س_م}$ ∴ ظا هـ = $\frac{٢٠٫٨}{١٩٫٢} = \frac{١٣}{١٢}$ ∴ ق(∠ هـ) = ظا$^{-1}$($\frac{١٣}{١٢}$) = ٤٧ ١٧ ٥٤°

🕮 مثـــال:

أ ب جـ ء صفيحة رقيقة منتظمة على شكل مربع طول ضلعه ٤٨ سم وكتلتها ٤٠ جم ، النقطتان ل ، م منتصفا $\overline{أب}$ ، $\overline{أء}$ على الترتيب. قطع المثلث أ ل م ثم ثبتت عند كل من جـ ، ء كتلة تساوى كتلة المثلث المقطوع وثبت عند ب كتلة تساوى ضعف كتلة المثلث المقطوع. فإذا علقت المجموعة تعليقا حرا من النقطة جـ ، أوجد ظل زاوية ميل $\overline{بجـ}$ على الرأسى فى وضع الإتزان.

✍ الحـــل:



∵ الصفيحة منتظمة الكثافة

∴ النسبة بين الكتل = النسبة بين المساحات

، ∵ مساحة المربع $= ٤٨ \times ٤٨ = ٢٣٠٤$ سم^٢

ومساحة المثلث $= \frac{١}{٢} \times ٢٤ \times ٢٤ = ٢٨٨$ سم^٢

∵ كتلة المربع ك $= ٤٠$ جم

∴ كتلة المثلث المقطوع $ك_١ = -\frac{٢٨٨}{٢٣٠٤} \times ٤٠ = -٥$ جم

∴ الكتلة المضافة عند جـ هى $ك_٢ = ٥$ جم

وعند ء هى $ك_٣ = ٥$ وعند ب هى $ك_٤ = ١٠$ جم

نأخذ $\overleftrightarrow{جب}$ ، $\overleftrightarrow{جء}$ محورين متعامدين باعتبار جـ نقطة الأصل

∴ أ $= (٤٨ ، ٤٨)$ ، ل $= (٤٨ ، ٢٤)$ ، م $= (٢٤ ، ٤٨)$

∴ $م_٢ = \left(\frac{٤٨+٤٨+٢٤}{٣} ، \frac{٤٨+٢٤+٤٨}{٣}\right) = (٤٠ ، ٤٠)$ ، $م_١ = (٢٤ ، ٢٤)$

بتكوين جدول الإحداثيات

النقطة	$م_١$	$م_٢$	جـ	ء	ب
الكتلة	٤٠	−٥	٥	٥	١٠
س	٢٤	٤٠	٠	٠	٤٨
ص	٢٤	٤٠	٠	٤٨	٠

∴ $س_{م_٣} = \frac{ك س - ك_١ س_١ + ك_٢ س_٢ + ك_٣ س_٣ + ك_٤ س_٤}{ك - ك_١ + ك_٢ + ك_٣ + ك_٤}$

$= \frac{٤٠ \times ٢٤ - ٥ \times ٤٠ + ٥ \times ٠ + ٥ \times ٠ + ١٠ \times ٤٨}{٤٠ - ٥ + ٥ + ٥ + ١٠} = \frac{٢٤٨}{١١}$

، $ص_{م_٣} = \frac{ك ص - ك_١ ص_١ + ك_٢ ص_٢ + ك_٣ ص_٣ + ك_٤ ص_٤}{ك - ك_١ + ك_٢ + ك_٣ + ك_٤}$

$= \frac{٤٠ \times ٢٤ - ٥ \times ٤٠ + ٥ \times ٠ + ٥ \times ٤٨ + ١٠ \times ٠}{٤٠ - ٥ + ٥ + ٥ + ١٠} = \frac{٢٠٠}{١١}$

وبفرض هـ زاوية ميل $\overline{جب}$ على الرأسى

∵ ظاهـ $= \frac{ص_{م_٣}}{س_{م_٣}}$ ∴ ظاهـ $= \frac{٢٠٠}{١١} \div \frac{٢٤٨}{١١}$ ∴ ظاهـ $= \frac{٢٠٠}{٢٤٨} = \frac{٢٥}{٣١}$

مثـــال:

صفيحة رقيقة منتظمة الكثافة على شكل مستطيل أ ب جـ ء فيه أ ب = ٢٥ سم ، ب جـ = ١٦ سم فرضت نقطة هـ ∈ $\overline{ب جـ}$ ، و ∈ $\overline{ب أ}$ بحيث ب هـ = ١٠ سم ثم فصل المثلث ب هـ و ووضعت الصفيحة فى مستوى رأسى بحيث إنطبق حرفها $\overline{جـ هـ}$ على نضد أفقى أملس فكانت الصفيحة على وشك الدوران حول (هـ). أوجد طول $\overline{ب و}$.

الحـــل:

∵ الصفيحة منتظمة الكثافة وبفرض ب و = ل

∴ النسبة بين الكتل = النسبة بين المساحات

، ∵ مساحة المستطيل = ٢٥ × ١٦ = ٤٠٠ سم^2

ومساحة المثلث = $\frac{1}{2}$ × ١٠ × ل = ٥ل سم^2

بفرض كتلة المستطيل = ٤٠٠ك

∴ كتلة المثلث المقطوع ك$_1$ = $-\frac{٥ل}{٤٠٠}$ × ٤٠٠ك = −٥ل ك

نأخذ $\overleftrightarrow{هـ س}$ ، $\overleftrightarrow{هـ ص}$ محورين متعامدين باعتبار هـ نقطة الأصل

∴ هـ = (٠،٠) ، ب = (١٠، ٠) ، و = (١٠، ل)

∴ م$_2$ = ($\frac{٠+١٠+١٠}{٣}$ ، $\frac{٠+٠+ل}{٣}$) = ($\frac{٢٠}{٣}$ ، $\frac{ل}{٣}$) ، م$_1$ = (٢، ١٢,٥)

بتكوين جدول الإحداثيات

النقطة	م$_1$	م$_2$
الكتلة	٤٠٠ك	− ٥ل ك
س	٢	$\frac{٢٠}{٣}$
ص	١٢,٥	$\frac{ل}{٣}$

∴ س$_م$ = $\frac{٤٠٠ك × ٢ − ٥ل ك × \frac{٢٠}{٣}}{٤٠٠ك − ٥ل ك}$ = $\frac{٨٠٠ − \frac{١٠٠}{٣}ل}{٤٠٠ − ٥ل}$

∵ الصفيحة على وشك الدوران حول هـ ∴ هـ تعتبر نقطة إرتكاز (مثل نقطة التعليق)

∴ الخط الرأسى المار بنقطة هـ يمر بمركز الثقل ∴ س$_م$ = ٠

∴ $\frac{١٠٠}{٣}$ل = ٨٠٠ ∴ ل = $\frac{٨٠٠ × ٣}{١٠٠}$ = ٢٤ ∴ ب و = ٢٤ سم